Reptes

Problemes

Óscar Rivero
Universidade de Santiago de Compostela (Galícia)

La tardor d'aquest any ens porta quatre nous problemes al *SCM/Notícies*. Miquel Amengual i Marc Felipe ens fan suggeriments engrescadors al voltant de la geometria clàssica, José Luis Díaz ens proposa un problema sobre matrius i Joaquim Nadal ens regala un bonic joc de probabilitats.

Pel que fa a les solucions, n'hem rebut de Miquel Amengual, Pere Martínez, Joaquim Nadal i Bruno Salgueiro. Els agraïm a tots la seva dedicació, el temps emprat i les seves solucions originals. En publiquem, com és habitual, una selecció.

Us animem a tots a enviar les vostres propostes, tant de problemes com de solucions. S'han d'enviar preferiblement en TEX o LATEX, i així mateix cal adjuntar els dibuixos corresponents en un format que sigui editable. Agrairem que sigui així per tal d'una ràpida i eficaç edició dels fitxers, gràcies! Les solucions i propostes de problemes envieu-les a

`riverosalgado@gmail.com`.

Problemes proposats

A189. (Proposat per Miquel Amengual Covas, Cala Figuera, Mallorca.) Un quadrilàter convex $ABCD$ està inscrit en una circumferència Γ. Sigui M el punt mitjà de l'arc AB de Γ que no conté els punts C i D. i sigui N el punt mitjà de l'arc CD de Γ que no conté els punts A i B.

Provau que

$$\frac{AN^2 - BN^2}{AB} = \frac{DM^2 - CM^2}{CD}.$$

A190. (Proposat per José Luis Díaz Barrero, UPC, Barcelona.) Siguin A i B dues matrius 3×3 amb entrades reals, de manera que se satisfà $\det(A) = \det(B) = 0$ i $\det(A + B) = \det(A - B) = 0$. Siguin $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Proveu que $\det(\lambda A + \mu B) = 0$. És cert per a matrius 4×4?

A191. (Proposat per Joaquim Nadal i Vidal, Llagostera, Girona.) L'Andreu i la Berta juguen a un joc basat a llançar repetidament dos daus de sis cares. L'Andreu diu que primer sortirà suma 12. La Berta diu que primer sortirà suma 7 dues vegades consecutives. L'Andreu i la Berta tiren repetidament el dau fins que un d'ells guanya. Quina és la probabilitat que l'Andreu guanyi?

A192. (Proposat per Marc Felipe Alsina, UPC, Barcelona.) Sigui ABC un triangle escalè i A', B' i C' els peus de les altures per A, B i C, respectivament. Sigui D la intersecció de BC i $B'C'$, i sigui P el punt de tall d'AC amb la recta que passa per A' i el punt mitjà d'AB. Proveu que PD i AB són paral·leles.

Solucions

A185. (Proposat per Miquel Amengual Covas, Cala Figuera, Mallorca)

En un pla, siguin A, B, C, D quatre punts situats, en aquest ordre, sobre una línia recta ℓ.

En un dels dos semiplans determinats per ℓ, construïm els triangles equilàters ABP, BCQ i CDR.

1. Suposem que $AB + CD = BC$. Provau que

   1.1 $PQ = QR$.

   1.2 $\angle PQR = 120°$.

2. Suposem que $\frac{1}{AB} + \frac{1}{CD} = \frac{1}{BC}$. Provau que

   2.1 $PQ : QR = AB : CD$.

   2.2 $\angle PQR = 120^\circ$.

Solució: (Solució del proponent)

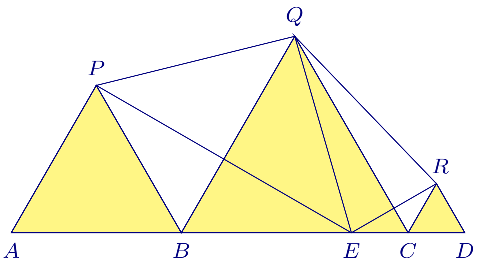
1. Suposem $AB + CD = BC$.

   Sigui E el punt del segment BC tal que $AB = BE$.

   Atès que

$$\begin{aligned} \angle PBQ &= 180^\circ - \angle ABP - \angle QBC \\ &= 180^\circ - 60^\circ - 60^\circ \\ &= 60^\circ \\ &= \angle QBE, \end{aligned}$$

   BQ és la bisectriu de l'angle PBE en el triangle isòsceles PBE ($PB = AB = BE$).



   En conseqüència, BQ és la mediatriu del segment PE i, per tant,

$$PQ = QE. \qquad (1)$$

   Anàlogament, atès que

$$\begin{aligned} CE &= BC - BE \\ &= BC - AB \\ &= CD = CR, \end{aligned}$$

   CQ és la mediatriu de ER i, per tant,

$$QE = QR. \qquad (2)$$

   Tenint present (1) i (2),

$$PQ = QR,$$

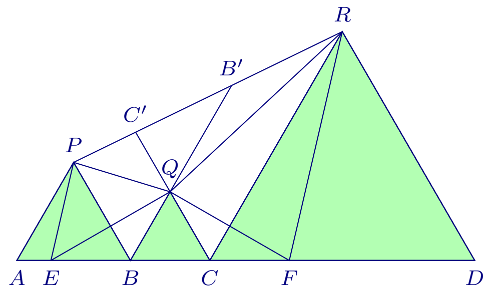
   com es volia.

   D'altra banda, si diem $\varphi = \angle PQR$,

$$\begin{aligned} \varphi &= \angle PQE + \angle EQR \\ &= 2 \cdot \angle BQE + 2 \cdot \angle EQC \\ &= 2\,(\angle BQE + \cdot \angle EQC) \\ &= 2 \cdot \angle BQC \\ &= 2 \cdot 60^\circ \\ &= 120^\circ. \end{aligned}$$

2. Suposem $\frac{1}{AB} + \frac{1}{CD} = \frac{1}{BC}$.

   Sigui E el punt simètric de C respecte de B i sigui F el punt simètric de B respecte de C.



   Atès que

$$\begin{aligned} \frac{EB}{BP} = \frac{BC}{AB} & \\ &= 1 - \frac{BC}{CD} \\ &= \frac{CD - BC}{CD} \\ &= \frac{CD - CF}{CD} \\ &= \frac{FD}{DR} \end{aligned}$$

   i

$$\angle EBP = 60^\circ = \angle FDR,$$

   els triangles PEB i RFD són semblants (costat-angle-costat) i, per tant,

$$\frac{PE}{PB} = \frac{RF}{RD}.$$

   És a dir:

$$\frac{PE}{AB} = \frac{RF}{CD}. \qquad (3)$$

   Al seu torn, dels parells de triangles iguals PEB, PQB i RFC, RQC se'n dedueix que $PE = PQ$ i $RF = RQ$. Substituint això a (3) s'obté

$$\frac{PQ}{AB} = \frac{RQ}{CD},$$

   equivalent a l'expressió volguda a l'apartat 2.1 de l'enunciat.

D'altra banda, sigui $\{B'\} = BQ \cap PR$ i $\{C'\} = CQ \cap PR$.

Es compleix:

$$\angle PQC = \angle QPB = \angle EPB = \angle FRD$$

i

$$\angle B'QR = QRC \qquad = \angle CRF,$$

d'on deduïm que

$$\begin{aligned}\angle B'QR + \angle PQC' &= \angle CRF + \angle FRD \\ &= \angle CRD \\ &= 60^\circ.\end{aligned}$$

Finalment,

$$\begin{aligned}\varphi &= \angle PQC' + \angle C'QB' + \angle B'QR \\ &= (\angle B'QR + \angle PQC') + \angle C'QB' \\ &= (\angle B'QR + \angle PQC') + \angle BQC \\ &= 60^\circ + 60^\circ \\ &= 120^\circ.\end{aligned}$$

A186. (Proposat per la redacció.) Sigui $n > 6$ un nombre perfecte, i sigui $n = p_1^{e_1} \cdots p_k^{e_k}$ la seva factorització en primers, amb $1 < p_1 < \ldots < p_k$. Proveu que e_1 és un nombre parell. (Recordeu que es diu que un nombre n és perfecte quan la suma dels seus divisors, excepte ell mateix, és igual a n).

Solució: (Solució de Pere Martínez, Hospitalet de Llobregat) Observi's que la condició de l'enunciat es pot escriure com

$$\prod_{i=1}^{k} \frac{p_i^{e_i+1} - 1}{p_i - 1} = 2 \prod_{i=1}^{k} p_i^{e_i}.$$

Tenim però que

$$\frac{p_1^{e_1+1} - 1}{p_1 - 1} = p_1^{e_1} + \ldots + p_1 + 1,$$

i si e_1 fos senar, p_1+1 seria un divisor d'aquesta expressió. Això voldria dir que $p_1 + 1$ divideix el costat de la dreta, i com que és més gran que dos, divideix alguns dels p_i; perqué això passi, cal que $p_1 + 1 = p_i$, la qual cosa vol dir que $p_1 = 2$ i $p_2 = 3$. Aleshores, $n/2$, $n/3$, $n/6$ i 1 són divisors diferents de n (i diferents de n), i per tant tenim que

$$\frac{n}{2} + \frac{n}{3} + \frac{n}{6} + 1 = n + 1 > n,$$

i el nombre no pot ser perfecte quan e_1 és senar.

A187. (Proposat per José Luis Díaz Barrero, UPC, Barcelona.) Sigui $n \geq 1$ un nombre enter, i per a qualsevol x real, denoti's per $\lfloor x \rfloor$ la seva part entera. Avalueu la suma

$$\sum_{k=1}^{n} \left\lfloor \frac{k}{\sqrt[k]{k!}} \right\rfloor.$$

Solució: (Solució de Marc Felipe i Alsina, UPC, Barcelona) Per resoldre el problema partim de les següents tres observacions:

(a) Si $k \geq 1$, $\int_1^k \log x \, dx = k \log(k) - (k-1)$.

(b) Si $k \geq 1$, $\sum_{i=1}^k \log i \geq \int_1^k \log x \, dx$.

(c) Si $k \geq 1$, $2k^k \leq (k+1)^k$.

Observi's ara que $2^k \cdot k! \leq k^k$ quan $k = 6$. Per inducció, es veu que si aquesta desigualtat és certa per a k, també ho és per a $k+1$:

$$\begin{aligned}2^{k+1} \cdot (k+1)! &= 2(k+1)2^k \cdot k! \\ &\leq 2(k+1)k^k \\ &\leq (k+1) \cdot (k+1)^k \\ &= (k+1)^{k+1}.\end{aligned}$$

Per tant, $\frac{k}{\sqrt[k]{k!}} \geq 2$ per a tot $k \geq 6$.

Per altra banda,

$$\begin{aligned}\log\left(\frac{k}{[k]k!}\right) &= \log k - \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} \log i \\ &\leq \frac{k-1}{k} < 1,\end{aligned}$$

on s'han emprat les desigualtats anteriors. Aleshores, la part entera val 1 per a $k = 1, 2, 3, 4, 5$ (càlcul rutinari) i val 2 per a $k \geq 6$, ja que el nombre sempre està fitat entre 2 i e. Per tant, la resposta és n si $n \leq 5$ i $2n - 5$ si $n \geq 6$.

A188. (Proposat per Joaquim Nadal i Vidal, Llagostera, Girona.)

Sigui ABC un triangle isòsceles rectangle a C. Siguin P i Q punts sobre la hipotenusa, amb el punt P entre A i Q, de manera que $\angle PCQ = 45^\circ$. Proveu que

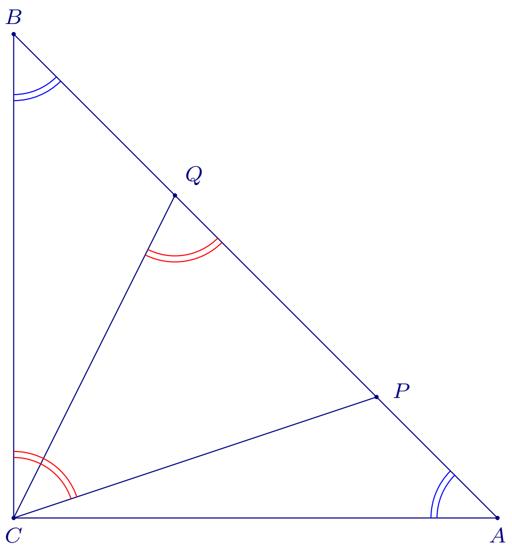
$$AP^2 + BQ^2 = PQ^2.$$

Solució: (Solució de Miquel Amengual Covas, Cala Figuera, Mallorca.) Els triangles BCP i AQC són semblants, ja que tenen dos angles iguals:

$$\angle PBC = \angle ABC = 45^\circ = \angle CAB = \angle CAQ$$

i

$$\begin{aligned} \angle BCP &= \angle BCQ + \angle QCP \\ &= \angle BCQ + 45^\circ \\ &= \angle BCQ + \angle ABC \\ &= \angle BCQ + \angle QBC \\ &= \angle AQC \end{aligned}$$



En resulta que

$$\frac{PB}{BC} = \frac{CA}{AQ},$$

o bé,

$$BC \cdot CA = PB \cdot AQ. \qquad (4)$$

Però com que $BC = CA$, del teorema de Pitàgores aplicat a ABC, se'n dedueix que

$$BC \cdot CA = \left(BC^2\right) = \frac{1}{2} AB^2$$

Substituint això a (1), s'obté

$$AB^2 = 2 \cdot PB \cdot AQ.$$

Aquesta igualtat es pot escriure en la forma $(AP + PQ + QB)^2 = 2(PQ + QB)(AP + PQ)$.

Llavors, desenvolupant i simplificant, ens queda

$$AP^2 + BQ^2 = PQ^2,$$

precisament allò que volíem demostrar.

Matemots

Xavier Gràcia
Universitat Politècnica de Catalunya

Recordeu que aquesta secció és un joc de llengua (vegeu l'article introductori al núm. 33 de la *SCM/Notícies*). Cal resoldre els enigmes lingüístics següents, a partir de la definició donada i les pistes incloses.

Exemple: "Encén passions al voltant del teorema de l'índex (menys de 5 lletres)". Aquest era bastant difícil! La resposta és *atia*, ja que *atiar* té el sentit figurat d'excitar les passions, i la resposta es pronuncia de manera molt semblant al cognom del matemàtic Michael Atiyah, coautor epònim amb Isadore Singer del cèlebre teorema de l'índex.

Com sempre, en cas de dubte, podeu trobar les respostes a peu de pàgina.[4]

1. Se'n pot trobar a la circumferència i a la taula periòdica (menys de 5 lletres)
2. La superfície més salvatge (6 lletres)
3. Participació compromesa en un curset de lògica proposicional (10 lletres)
4. Habilitat per sumar els elements de la diagonal (5 lletres)
5. Cartell a l'entrada de la llibreria especialitzada en topologia (5 lletres)
6. Els ous preferits per Poincaré (10 lletres)
7. Fantasma que recorre l'àlgebra commutativa (8 lletres)
8. Grup d'esportistes interessats en l'obra d'Eilenberg i Mac Lane (9 lletres)

[4] Respostes als Matemots: 6. estrellats 4. traça 8. categoria 2. esfera 5. obert 7. espectre 1. radi 3. implicació